نشریه مباحث برگزیده در انرژی، سال اول، شماره اول ۱۳۹۶

# بررسی روش‌های موجود برای شبیه‌سازی کاهش درگ آشفته با استفاده از میکروفیبرها

امین موسائی [۱*]، کورش گودرزی [۲]، جلیل عباسی [۳]

۱-استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج
۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج
۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج
*پست الکترونیک نویسنده مسئول: moosaie@yu.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۵/۰۶/۰۶ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۱/۲۳

**چکیده**

**کاهش درگ در جریان آشفته سبب دستیابی به سرعت‌های بالاتر و کاهش مصرف منابع انرژی برای حرکت جسم می‌شود. جریان آشفته به دلیل تأثیری که بر روی لایه مرزی و نیروی مقاوم اجسام دارد، تحلیل اثرات آن موردعلاقه مهندسان است. بررسی کاهش درگ جریان‌های آشفته به کمک روش شبیه‌سازی مستقیم عددی بسیاری از جزئیات موردنیاز را نشان می‌دهد. در مقاله حاضر روش‌های موجود برای شبیه‌سازی کاهش درگ جریان آشفته با افزودنی‌های میکروفیبر به‌اختصار بررسی و تشریح شده‌اند. در ابتدا معادلات ناویر- استوکس سه بعدی و وابسته به زمان برای جریان تراکم ناپذیر یک سیال غیر نیوتنی به همراه فرضیات اساسی در نظر گرفته شده آورده شده است. اثرگذاری فیبرها بر روی سیال حامل، توسط یک تانسور تنش غیر نیوتنی در معادله ناویر استوکس، اعمال می‌شود. تانسور تنش غیرنیونی وابسته به تابع توزیع جهت‌گیری فیبرها است که توسط معادله فوکر-پلانک بیان می‌شود. در این پژوهش به بررسی روش‌های مختلف حل معادله فوکر-پلانک جهت بسته شدن و حل معادلات ناویر-استوکس پرداخته شده است.**

**کلیدواژگان: جریان آشفته، کاهش درگ، شبیه‌سازی مستقیم عددی، افزودنی‌های میکروفیبر**

# Existing Methods For The Simulation of Turbulent Drag Reduction By Using Microfibers

**Amin Moosaie[1*], Kourosh Goudarzi[1], Jalil Abbasi[2]**

1-Assistant Professor of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran
2- Associate Professor of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran
3- M.Sc. Student of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran
*Corresponding author, E-mail address: moosaie@yu.ac.ir

Received: 27.08.2016 Accepted: 12.04.2017

## Abstract

Drag reduction in turbulent flows allows achieving of higher speeds and reducing energy consumption in the motion of submerged objects. An efficient technique for drag reduction uses dilute solutions of microfibers. In this paper, a review of available methods for the simulation of turbulent drag reduction by microfiber additives is presented. To compute the turbulent flow, the direct numerical simulation (DNS) technique is employed. The effect of the fibers on the flow is described by a non-Newtonian stress tensor, involving the distribution of fiber position and orientation. The fiber dynamics is governed by a Fokker-Planck equation. The computation involves a numerical solution of three-dimensional, time-dependent Navier-Stokes equations for the incompressible flow of a non-Newtonian fluid. In this article, various methods for solving the Fokker-Planck equation are reviewed.

**Keywords:** Turbulent flow, Drag reduction, Direct numerical simulation, Microfiber additives

[ Downloaded from yujs.yu.ac.ir on 2026-10-08 ]

## ۱- مقدمه

دلیل کاربردهای گسترده جریان‌های آشفته در صنعت، مطالعه و درک بنیادی فیزیک این دسته از جریان‌ها از اهمیت قابل ملاحظه‌ای برخوردار است. جریان آشفته جریانی است که با افزایش عدد رینولدز، جریان دارای حرکاتی نامنظم و بی‌سازمان می‌شود. این جریان‌ها دارای خصوصیاتی مانند بی‌نظمی مکانی و زمانی، طیف پیوسته مکانی و زمانی مقیاس‌ها، سه بعدی بودن، آشوبناک بودن و اختلاط سریع هستند. در جریان آشفته به دلیل افزایش نفوذ مومنتوم، توسط بسته‌های پر سرعت در نزدیک دیواره (فرآیند جاروب)، نمایه سرعت در لایه مرزی در مقایسه با جریان آرام تخت‌تر می‌شود. این به معنای افزایش گرادیان سرعت متوسط بر روی دیوار است. طبق قانون لزجت نیوتن، افزایش گرادیان سرعت موجب افزایش تنش برشی و در نتیجه افزایش درگ اصطکاکی می‌شود؛ بنابراین، آشفتگی باعث افزایش قابل‌ملاحظه درگ اصطکاکی می‌گردد. نیروی درگ اصطکاکی بر روی سطوح صاف و همچنین سطوح دارای انحنای کم، دارای مقدار قابل‌توجهی است. نیروی درگ ناشی از جریان موجب افزایش قابل‌توجه مصرف انرژی و در نتیجه کاهش بهره‌وری اقتصادی و افزایش آلایندگی محیط‌زیست می‌شود؛ بنابراین در مسائل صنعتی به دنبال راهی برای کاهش درگ آشفته هستیم. کاهش درگ آشفته می‌تواند سبب صرفه‌جویی بسیار در مصرف انرژی و بهبود عملکرد فنی و اقتصادی سیستم‌های سیالاتی گردد.

دو روش عمده در مسائل کاهش درگ، روش‌های غیرفعال و روش‌های فعال هستند. کاربرد هر کدام از روش‌ها وابسته به شرایط فیزیکی مسئله دارد. در روش‌های غیرفعال برای کاهش پدیده درگ، کنترل آشفتگی به‌صورت یک سیکل بسته انجام نمی‌شود؛ بنابراین بازخورد آن نیز مورد بررسی قرار نمی‌گیرد. در این روش به‌وسیله افزودن یک اثر موردنظر برای کاهش درگ مانند افزودن فیبر و پلیمر [۱ و ۲]، تزریق میکروحباب [۳]، ریبلت‌ها [۴]، سرفاکتانت‌ها و پوشش سطح با مواد هیدروفوبیک [۵] کنترل آشفتگی صورت می‌گیرد؛ اما در روش فعال، کنترل آشفتگی به‌صورت بازخوردی در یک سیکل بسته انجام می‌شود. مطابق این روش، می‌توان در کارهای آزمایشگاهی از یک دیواره هوشمند دارای حسگر و عملگر استفاده کرد. در این روش با نزدیک شدن گردابه‌های جریان آشفته به دیواره، حسگرها آن‌ها را شناسایی کرده و عملگرها را فعال می‌کند، عملگرها با توجه به نوع گردابه‌ها، دیواره را به‌گونه‌ای حرکت می‌دهند که گردابه‌ها از بین بروند و یا تضعیف شوند. بدین ترتیب جریان آشفته در نزدیک دیواره آرام‌تر شده و کاهش پدیده کاهش درگ صورت می‌گیرد [۶]. تئوری‌های مورد بررسی در این پژوهش از روش غیرفعال با افزودن فیبر و پلیمر در جریان سیال آشفته است.

پلیمرها به دو دسته صلب میله‌ای مانند (فیبر) و انعطاف‌پذیر تقسیم می‌شوند. پلیمرهای انعطاف‌پذیر در برابر پلیمرهای صلب (فیبرها) درگ را در سطح بالاتری کاهش می دهند، اما به دلیل ناپایداری و خاصیت ارتجاعی در یکدیگر فرورفته و خواص اولیه خود را در کاهش درگ از دست می دهند. استفاده هم‌زمان از پلیمرهای صلب و انعطاف‌پذیر نیز در زمینه کاهش درگ کاربرد دارد که از استفاده کردن هر کدام به‌صورت مجزا مؤثرتر واقع می‌گردد. پاشکویتز[1] در این مورد تحقیقاتی انجام داده است [۷] و در کارهای آزمایشگاهی دن‌توندر و همکاران[2] نیز دیده می‌شود.

مقادیر کاهش درگ حتی بیش از ۸۰ درصد با افزودن پلیمر به جریان مشاهده شده است. آزمایش‌ها نشان داده‌اند با افزایش وزن ملکولی پلیمرها کاهش درگ افزایش پیدا می‌کند [۸]. در ساخت پلیمرها از مواد مختلفی همچون پلی آکویل آمید، هیدروکربن‌ها، کربوکسی متیل سلولز، پلی‌اتیلن اکساید، پلی دی متیل سیلوگزان [۹] و بسیاری از مواد دیگر که وابسته به شرایط دمایی و شیمیایی سیال حامل است، استفاده می‌شود.

کاهش درگ به کمک پلیمرها و فیبرها به‌طور تصادفی توسط تامس در خلال جنگ جهانی دوم کشف شد. به خاطر کاربردهای بالقوه این تکنولوژی در مسائل نظامی، این کشف مخفی ماند و پس از پایان جنگ منتشر شد. پس از آن این موضوع به‌طور نسبتاً گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفت. از کاهش درگ به‌وسیله میکروفیبرها در بسیاری از فعالیت‌های صنعتی از قبیل عملیات چاه نفت، سیستم‌های فاضلاب، زیردریایی‌ها، کشتی‌سازی، لوله‌های آتش‌نشانی مورد استفاده قرار گرفته شده‌اند.

برای تجزیه و تحلیل معادلات حاکم بر جریان آشفته روش های تحلیلی، عددی و تجربی وجود دارد. روش تحلیلی برای جریان‌های آشفته بسیار پیچیده و مشکل است و همچنین روش‌های آزمایشگاهی زمان بر و مقرون به‌صرفه نیست؛ بنابراین برای تجزیه و تحلیل جریان‌های آشفته از

[1] Paschkewitz
[2] Den Toonder



[ Downloaded from yujs.yu.ac.ir on 2026-10-08 ]

شبیه‌سازی‌های عددی استفاده شده است. عمدتاً سه روش شبیه‌سازی در این راستا وجود دارد. شبیه‌سازی مستقیم عددی[1] (DNS) [۱۰ و ۱۱]، شبیه‌سازی ادی‌های بزرگ[2] (LES) [۱۲] و مدل کردن آماری آشفتگی[3] (RANS) [۱۳]. از نظر ماهیت محاسباتی، DNS دقیق‌ترین روش محسوب می‌شود و LES بین DNS و RANS قرار می‌گیرد. روش DNS بدون هیچ گونه مدل‌سازی و با اعمال شبکه‌بندی در حد کوچک‌ترین مقیاس‌های جریان (مقیاس کولموگرف[4]( به‌عنوان آزمایشگاه عددی شهرت یافته است. به دلیل عدم تکامل روش‌های عددی دقیق، عدم وجود ماشین‌های محاسباتی قدرتمند و نیز عدم تکامل تئوری‌های رئولوژیکی موردنیاز برای توصیف جریان سوسپانسیون‌های رقیق پلیمری، این تحقیقات با مشکلات فراوانی روبه‌رو بوده است. به همین دلیل، تحقیقات انجام شده معمولاً محدود به مطالعات تجربی و آزمایشگاهی بوده است. با توجه به اینکه در گذشته و حتی تا حدودی امروزه اندازه‌گیری کمیات جریان آشفته به‌خصوص در نزدیکی دیوار یک چالش بوده است و همچنین اینکه اندازه‌گیری خواص ذرات پلیمری مانند جهت‌گیری فضایی آن‌ها بسیار پیچیده بوده و نیاز به ابزارهای اپتیکی خاصی دارد [۱۴]، این پژوهش‌های تجربی نیز با محدودیت‌های فراوانی روبه‌رو بوده‌اند. علیرغم اینکه بیش از ۶۰ سال پژوهش در زمینه کاهش درگ به کمک افزودنی‌های پلیمری و فیبری، مکانیسم کاهش درگ توسط این ذرات تا به امروز کاملاً شناخته شده نیست. این مقاله به معرفی و شناخت این پدیده پیچیده اختصاص‌یافته، تحقیقات مختلف و نظریه‌های مطرح، به‌صورت دسته‌بندی و تدوین‌شده بررسی شده است.

ادامه این مقاله به ترتیب زیر سازماندهی شده است. معرفی فرضیات در نظر گرفته شده برای جریان سوسپانسیون غیر نیوتنی در بخش ۲ ارائه شده است. تئوری و معادلات حاکم بر مسئله در بخش ۳ بیان می‌شود. روش‌های مختلف شبیه‌سازی عددی معادله فوکر-پلانک در بخش ۴ بررسی می‌شوند و بخش ۵ به نتیجه‌گیری کلی اختصاص یافته است.

## ۲- فرضیات اساسی

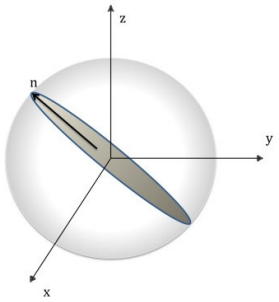
تئوری سوسپانسیون فیبری که در این مقاله از آن استفاده شده است مبتنی بر فرضیات زیر است. فیبرهای معلق در جریان، صلب و بیضی‌گون هستند. فیبرها آزادانه در جریان سیال حرکت می‌کنند و تأثیر آن‌ها بر روی جریان فقط به‌وسیله تانسور تنش غیر نیوتنی در نظر گرفته می‌شود. همه این فیبرها با اندازه‌ها و چگالی‌های یکسان بررسی می‌شوند. اندازه فیبرها از ساختارهای جریان یعنی مقیاس طولی کولموگروف (کوچک‌ترین مقیاس طولی در یک جریان آشفته) کوچک‌تر است. در کاربردهای عملی، این فرض ممکن است ارضا نشود. در چنین حالتی یک تئوری قابل‌قبول برای جریان سوسپانسیون موجود نبوده و یک موضوع تحقیقاتی باز است [۱۵]. به دلیل اینکه فیبرهای مورد استفاده بسیار کوچک هستند. جریان اطراف آن‌ها خزشی در نظر گرفته می‌شوند و از اثرات اینرسی جریان و کشش سطحی میان سیال و ذرات صرف‌نظر می‌شود. حضورترم اینرسی سیال باعث می‌شود که ذرات دارای حرکت چرخشی و انتقالی باشند.

به همین دلیل ترم اینرسی دارای اهمیت است. این ترم، در جریان‌های واقعی پدیدار می‌شود. سابرامانیان و کخ [۱۶] با بررسی اینرسی سیال، حرکت فیبر در جریان برشی را در نظر گرفتند و هم‌زمان شبیه‌سازی را در حضورترم اینرسی انجام دادند. موسائی اثرات اینرسی دورانی فیبرهای براونی را در یک سوسپانسیون رقیق فیبر مورد مطالعه قرار داد [۱۷]. سیال حامل بدون در نظر گرفتن میکروفیبرها سیال نیوتنی می‌باشد. از بردار واحد $n$ برای معرفی ذرات بیضی‌گون و دیسکی در نظر گرفته شده است. در شکل (۱) طرحواره یک فیبر و بردار نرمال جهت‌گیری آن نشان داده شده است. در ذرات دیسکی شکل و بیضی‌گون محل قرار گرفتن $n$ متفاوت است. برای ذرات دیسکی، بردار $n$ عمود بر سطح و برای ذرات بیضی‌گون، بردار واحد $n$ در راستای محوری ذره قرار می‌گیرد. یکی از خواص هندسی مهم فیبرها ضریب منظر آن‌ها $r = L/a$ می‌باشد که در آن $L$ نصف طول فیبر و $a$ نصف شعاع استوای فیبر است. در حالت خاص $r = 1$ ذرات کروی، هنگامی که $0 < r < 1$ ذرات به شکل دیسک تمایل پیدا می‌کنند، در حالتی که $r(0)$ از ضخامت ذرات دیسکی کاسته می‌شود و برای تشکیل فیبرها باید $r > 1$ باشد که با افزایش هر چه بیشتر $r$ فیبرها تمایل به نازک‌تر (حالت دیسکی شکل) شدن پیدا می‌کنند و بر اساس نتایج به دست آمده از آزمایشات تجربی، ضریب منظرهای بزرگ‌تر از ۳۰ برای کاهش درگ مناسب

[1] Direct Numerical Simulation
[2] large eddy Simulation
[3] Reynolds Averaged Navier-Stokes
[4] Kolmogorov



[ Downloaded from yujs.yu.ac.ir on 2026-10-08 ]




**شکل ۱**- فیبر صلب و بردار جهت‌گیری آن $\mathbf{n}$

هستند [۵]. البته باید به این نکته توجه داشت که ضریب منظرهای حدوداً بزرگ‌تر از ۱۰۰ سبب تغییر کیفی در رفتار تنش‌های غیر نیوتنی نشده و فقط تغییرات کمی را در پی دارد. فیبرهای معلق در سیال نیوتنی دارای حرکات تصادفی و پیوسته هستند. مولکول‌های سیال دائماً در جهت‌های مختلف حرکت می‌کنند و به فیبرها ضربه وارد می‌کنند و این موجب حرکت تصادفی آن‌ها می‌شود؛ بنابراین حرکت فیبرها بر اساس حرکت براونی دورانی $D_r$ و حرکت فضایی $D_s$ تقسیم‌بندی می‌شوند:

$$D_s \propto \frac{TK_B}{\mu L} \qquad (۱)$$

$$D_r \propto \frac{TK_B}{\mu L^3} \qquad (۲)$$

در این دو معادله فوق $l=2L$، نسبت طول فیبر و $k_B = ۱.۳۸۱\times۱۰^{-۲}$ ثابت بولتزمان است. نسبت حرکت براونی دورانی $D_r$ به حرکت فضایی $D_s$ عبارت است از:

$$\frac{D_s}{D_r} = l \qquad (۳)$$

چون فیبرهایی در نظر گرفته شده دارای طولی $(l<<1)$ می‌باشد، می‌توان طبق رابطه فوق از حرکت فضایی $D_s$ در محاسبات صرف‌نظر کرد. برای تعیین غلظت سوسپانسیون نیاز به تعریف پارامترهای دانسیته عددی و کسر حجمی برای غلظت می‌باشیم که عبارت‌اند از:

$$n = \frac{N_P}{V_t} \qquad (۴)$$

$$\phi = \frac{V_P N_P}{V_t} = nV_P \qquad (۵)$$

در رابطه‌های بالا $N_P$ نشان‌دهنده تعداد ذرات موجود در سوسپانسیون است. $V_t$ و $V_P$ به ترتیب نشان‌دهنده حجم کل سیال حامل و حجم ذرات است. چنانچه رابطه $\phi r^2 < 1$ برقرار باشد سوسپانسیون رقیق حاصل می‌شود و می‌توان از تعاملات مکانیکی (تأثیر فیزیکی فیبرها بر روی یکدیگر) و تعاملات هیدرودینامیکی (تأثیر سیال حامل بر فیبرها) صرف‌نظر کرد؛ به عبارت دیگر کوپل یک‌طرفه است و فقط میدان جریان سیال حامل بر روی فیبرها تأثیرگذار است. به دلیل کاهش محاسبات و یکسان بودن نتایج هنگامی که سوسپانسیون نیمه رقیق و رقیق محاسبه می‌شوند، سوسپانسیون رقیق در نظر گرفته شده است. شرایط برقراری سوسپانسیون نیمه رقیق عبارت است از $\phi r < 1 < \phi r^2$ که فقط تعاملات هیدرودینامیکی در نظر گرفته می‌شود و با در نظر گرفتن $\phi r > 1$ سوسپانسیون غلیظ است؛ بنابراین در آن تعاملات مکانیکی و هیدرودینامکی پراهمیت هستند و محاسبه می‌شوند. با توجه به فرضیات در نظر گرفته شده، اثر فیبرها بر روی جریان توسط تانسور تنش غیر نیوتنی توصیف می‌شود که در ادامه به آن اشاره شده است.

## ۳- معادلات حاکم

معادلات ناویر-استوکس غیر نیوتنی برای جریان تراکم ناپذیر به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \qquad (۶)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\tau}^{N} + \boldsymbol{\tau}^{NN}\right) \qquad (۷)$$

که روابط بالا $\nabla$، اوپراتور نابلا $\mathbf{U}$، میدان برداری سرعت $\rho$، چگالی سیال حامل و $p$، میدان فشار می‌باشد. مشتق مادی بردار سرعت نیز به شکل زیر توصیف می‌شوند:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \qquad (۸)$$

تانسور تنش نیوتنی $\boldsymbol{\tau}^{N}$ به وجود آمده توسط سیال حامل به‌وسیله قانون لزجت نیوتن ارائه می‌شود:

$$\boldsymbol{\tau}^{N} = 2\mu \mathbf{D} \qquad (۹)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla \circ \mathbf{U} + \mathbf{U} \circ \nabla\right) \qquad (۱۰)$$

که در آن $\mu$، ضریب لزجت دینامیکی سیال حامل و $\mathbf{D}$، تانسور نرخ کرنش است. معادله مواد برای تانسور تنش غیر نیوتنی $\boldsymbol{\tau}^{NN}$ برای توصیف کامل جریان غیر نیوتنی و بسته شدن معادله (۷) موردنیاز است. برای این منظور با در نظر گرفتن رئولوژی سوسپانسیون رقیق فیبرها، بر اساس تئوری برنر [۱۵]، رابطه تانسور تنش غیر نیوتنی عبارت است از:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}^{NN} = {} & 2\mu_0 \mathbf{D} + \mu_1 \mathbf{1}\left(\mathbf{D} : \langle \mathbf{nn} \rangle_{\psi}\right) + \mu_2 \mathbf{D} : \langle \mathbf{nnnn} \rangle_{\psi} \\ & + 2\mu_3 \left(\langle \mathbf{nn} \rangle_{\psi} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \langle \mathbf{nn} \rangle_{\psi}\right) \\ & + 2\mu_4 D_r \left(3\langle \mathbf{nn} \rangle_{\psi} - \mathbf{1}\right)\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

در رابطه بالا $\mu_{i=0\ldots4}$، ضرایب مواد $\mathbf{1}$، تانسور یکه $D_r$، ضریب نفوذ براونی دورانی $\langle \mathbf{nnnn} \rangle_{\psi}$ و $\langle \mathbf{nn} \rangle_{\psi}$، گشتاورهای آماری



[ Downloaded from yujs.yu.ac.ir on 2026-10-08 ]

چهارم و دوم تابع توزیع جهت‌گیری و : اپراتور ضرب اسکالر دوگانه تانسورها می‌باشند. ضرایب مواد تابعی از لزجت سیال حامل $\mu$، نسبت منظر فیبرها $r$ و کسر حجمی $\phi$ (توصیف غلظت سوسپانسیون) می‌باشند. گشتاورهای آماری دوم و چهارم، تابع توزیع جهت‌گیری $\psi(\mathbf{n};\mathbf{x},t)$ می‌باشند که توسط رابطه‌های زیر ارائه می‌شوند:

$$\langle \mathbf{nn} \rangle_{\psi}(\mathbf{x},t) = \iint_{S} \mathbf{n}\circ\mathbf{n}\psi(\mathbf{n};\mathbf{x},t)\mathrm{d}S(\mathbf{n}) \qquad (۱۲)$$

$$\langle \mathbf{nnnn} \rangle_{\psi}(\mathbf{x},t) = \iint_{S} \mathbf{n}\circ\mathbf{n}\circ\mathbf{n}\circ\mathbf{n}\psi(\mathbf{n};\mathbf{x},t)\mathrm{d}S(\mathbf{n}) \qquad (۱۳)$$

از آنجا که میکروفیبرها صلب هستند، نقاط انتهایی آن‌ها هنگامی که کلیه جهت‌گیری‌ها را داشته باشد، سطح یک کره واحد را تشکیل می‌دهد. انتگرال‌های فوق بر روی فضای حالت که سطح کره واحد است صورت می‌گیرد. علامت $\circ$ نشان‌دهنده ضرب دیادیک است؛ بنابراین گشتاورهای آماری دوم و چهارم به ترتیب بیانگر یک تانسور طبقه دوم و چهارم هستند. در روابط مربوط به گشتاورها ملاحظه می‌شود که هر دو وابسته به تابع توزیع احتمال جهت‌گیری فیبرها $\psi(\mathbf{n};\mathbf{x},t)$ که تشریح کننده احتمال یافتن فیبرها در جهت $\mathbf{n}$ در نقطه $\mathbf{x}$ از میدان جریان در زمان $t$ می‌باشد. برای بیان تابع توزیع جهت‌گیری توسط معادله فوکر-پلانک [۱۸] (معادله مرکزی مکانیک کوانتوم) استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla\psi = -\nabla_{n}\cdot\left(\psi\dot{\mathbf{n}}\right) + D_{r}\Delta_{n}\psi \qquad (۱۴)$$

که در آن $\nabla_{n}$ و $\Delta_{n} = \nabla_{n}\cdot\nabla_{n}$ به ترتیب اوپراتورهای برداری نابلا و لاپلاسین بر روی سطح واحد کره، $\partial\psi/\partial t$ نشان‌دهنده تغییرات زمانی تابع احتمال توسط جابه‌جایی در فضای اقلیدسی با میدان سرعت $\mathbf{U}$، ترم‌های $\mathbf{U}\cdot\nabla\psi$ جابه‌جایی در فضایی اقلیدسی، $-\nabla_{n}\cdot(\psi\dot{\mathbf{n}})$ جابه‌جایی در روی کره، $D_{r}\Delta_{n}\psi$ نفوذ بر روی کره، ترم اول در سمت راست معادله فوکر-پلانک با سرعت تغییر بردار جهت‌گیری $\dot{\mathbf{n}}$ و نفوذ در فضای حالت با حرکت براونی دورانی می‌باشد. ترم سرعت تغییر بردار جهت‌گیری ظاهر شده در معادله (۱۴) توسط معادله جفری[1] تشریح می‌شود [۱۹]:

$$\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{n} + \kappa\left[\mathbf{D}\cdot\mathbf{n} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\right] \qquad (۱۵)$$

که در اینجا $\boldsymbol{\Omega}$ تانسور نرخ کرنش است:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\left(\nabla\circ\mathbf{U} - \mathbf{U}\circ\nabla\right) \qquad (۱۶)$$

همچنین ترم جدید ظاهر شده ضریب شکل $\kappa$ بر اساس ضریب منظر تعریف می‌شود:

$$\kappa = \frac{r^{2}-1}{r^{2}+1} \qquad (۱۷)$$

معادله جفری از حل تحلیلی معادله استوکس بر روی ذرات بیضی‌گون حاصل شده است. در اینجا ترم‌های مختلف معادله جفری را وارسی می‌کنیم. ترم $\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{n}$ دوران جسم صلب، $\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}$ نشان‌دهنده تغییر فرم فیبرها است. به دلیل اینکه فیبرها صلب هستند، بردار یکه جهت‌گیری آن‌ها نیز باید ثابت و به‌عنوان یک قید هندسی در کلیه فرمول‌ها لحاظ شود. ترم $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{n})$ جبران تغییر فرم و یکه نگه‌داشتن بردار جهت‌گیری را بر عهده دارد.

## ۴- روش‌های عددی مختلف برای حل معادله فوکر-پلانک

معادله فوکر-پلانک به دلیل ابعاد بالای آن (شش بعدی) به‌وسیله روش‌های عددی معمول مانند تفاضل محدود، حجم محدود و اجزای محدود از نظر محاسباتی بسیار حجیم بوده و به‌صرفه نیست. روش‌های مختلف ارائه شده برای حل معادله فوکر-پلانک عبارت‌اند از حل مستقیم معادله فوکر-پلانک [۲۰]، روش تقریب گشتاور [۲۱ و ۲۲] و روش مدل بستگی جبری [۲۳ و ۲۴]؛ که در زیر به تشریح هر کدام از روش‌های بالا می‌پردازیم.

حل عددی معادله فوکر-پلانک با استفاده روش مستقیم که خود به چند زیرمجموعه تقسیم می‌شود. روش هارمونیک‌های کروی گلیسن و بورسما [۲۵]، گسسته‌سازی مستقیم ژاروفسکی و همکاران [۲۶] و روش مستقیم حل استوکاستیک آماری برای اولین بار توسط موسائی [۲۰] و همچنین به کمک روش‌های میدان‌های تصادفی [۲۷] انجام شد. روش هارمونیک‌های کروی برای حل معادله فوکر-پلانک در جریان آشفته کانال استفاده کردند. حل آن‌ها محدود به حالتی است که حرکت براونی دورانی قوی باشد. با تشدید حرکت براونی دورانی، از میزان مؤثر بودن فیبرها در کاهش درگ کاسته می‌شود.

در ادامه به بررسی حل مستقیم معادلات حاکم بر جریان سوسپانسیون فیبر با استفاده از روش مستقیم استوکاستیک[2] آماری و میدان‌های تصادفی پرداخته می‌شود.

[1] Jeffery

[2] Stochastic



[ Downloaded from yujs.yu.ac.ir on 2026-10-08 ]

### ۴-۱- روش‌های مستقیم

در روش مستقیم استوکاستیک آماری [۲۰] برای مطالعه رئولوژی جریان آشفته از حل دوطرفه لاگرانژی استفاده شده است. مسیریابی لاگرانژی ذرات توسط رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = U(\mathbf{x}_p, t) \qquad (۱۸)$$

با انتگرال‌گیری صریح اویلر از معادله (۱۸) مکان ذره در مرحله زمانی جدید حاصل می‌شود:

$$\mathbf{x}_p^{n+1} = \mathbf{x}_p^n + \Delta t \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}_p^n, t^n) \qquad (۱۹)$$

این شبیه‌سازی بر اساس معادله جفری می‌باشد:

$$\frac{D\mathbf{n}}{Dt} = \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{n} + \kappa\left[\mathbf{D}\cdot\mathbf{n} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\right] + \boldsymbol{\Gamma}(t) \qquad (۲۰)$$

در اینجا $\boldsymbol{\Gamma}(t)$ ترم استوکاستیک است که سمت راست معادله جفری اضافه شده است. اگر بخواهیم فرآیند استوکاستیک را در شبیه‌سازی حرکت براونی دورانی (حالت براونی چرخشی ناشی از بمباران فیبر توسط مولکول‌های سیال حامل اطراف آن حاصل می‌شود) بکار بریم قابل تشخیص نیست؛ بنابراین معادله فوکر-پلانک را باید به‌صورت معادله لانژواین[1] استفاده کرد:

$$d\mathbf{n} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{n}, t)dt + \sigma(\mathbf{n}, t)d\mathbf{W}_t \qquad (۲۱)$$

معادله فوق دارای پاسخ یکسانی با معادله فوکر-پلانک است. ترم اول $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{n},t)dt$ در معادله بالا نشان‌دهنده جابه‌جایی و ترم دوم $\sigma(\mathbf{n},t)d\mathbf{W}_t$ نشان‌دهنده نفوذ در معادله فوکر-پلانک هستند که به‌صورت زیر قابل تعریف هستند:

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{n}, t) = \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{n} + \kappa\left[\mathbf{D}\cdot\mathbf{n} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\right] \qquad (۲۲)$$

$$\sigma(\mathbf{n}, t) = \sqrt{2D_r} \qquad (۲۳)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۲۱)، تبدیل به یک انتگرال ایتو[2] می‌شود:

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}(0) + \int_0^t \mu(\mathbf{n}, t')dt + \int_0^t \sigma(\mathbf{n}, t')d\mathbf{W}_{t'} \qquad (۲۴)$$

در اینجا $\mathbf{n}(0)$ شرایط مرزی اولیه می‌باشد. با به دست آوردن جهت‌گیری $\mathbf{n}(t)$ برای هر فیبر می‌توان با متوسط‌گیری آماری، گشتاور دوم و چهارم را برای بسته‌های فیبر محاسبه کرد:

$$\langle \mathbf{nn} \rangle_\psi = \frac{1}{N_f}\sum_{i=1}^{N_f} \mathbf{n}_i\mathbf{n}_i \qquad (۲۵)$$

$$\langle \mathbf{nnnn} \rangle_\psi = \frac{1}{N_f}\sum_{i=1}^{N_f} \mathbf{n}_i\mathbf{n}_i\mathbf{n}_i\mathbf{n}_i \qquad (۲۶)$$

در روابط بالا $N_f$ تعداد فیبرها در هر متوسط گیری است. با تعیین گشتاورهای آماری مرتبه دوم و چهارم به کمک رابطه تانسور تنش غیر نیوتنی معادلات ناویر استوکس بسته می‌شوند.

در روش حل مستقیم استوکاستیک اگرچه حجم محاسبات بالاست، ولی امکان محاسبه فیبرهای براونی ضعیف و یا غیر براونی وجود دارد. در شکل ۲ سرعت متوسط نسبت به فاصله بدون بعد از دیواره نشان داده شده است.

در راستای پژوهش بر روی روش‌های شبیه‌سازی مستقیم عددی موسائی از روش میدان‌های تصادفی بر اساس دیدگاه اویلری استفاده کرد [۲۷]. روش میدان‌های تصادفی برای حل عددی معادله فوکر-پلانک، در محاسبه تانسور تش غیر نیوتنی توسعه داده می‌شود. بر اساس رابطه لانژواین معادله (۲۱) دارای ترم جابه‌جایی در فضای فیزیکی و یک عبارت نفوذ در فضای حالت است. بر اساس این روش ترم‌های جابه‌جایی و نفوذ بر روی یک شبکه ثابت اویلری با استفاده از روش‌های متعارف عددی مانند تفاضل محدود، حجم محدود و یا اجزای محدود حل می‌شوند. موسائی از روش تفاضل محدود در پژوهش بر روی کاهش درگ جریان آشفته کانال بهره گرفته است. برای این منظور، عبارت جابه‌جایی معادله (۲۱) که شامل مشتق اول بردار جهت‌گیری می‌باشد. توسط یک روش بالادست مرتبه پنجم گسسته شده است:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_j = \frac{1}{60h}(\phi_{j-4} - 8\phi_{j-3} + 30\phi_{j-2} - 80\phi_{j-1} + 35\phi_j) + O(h^5) \qquad (۲۷)$$

و سپس با استفاده از روش مونت-کارلو لاگرانژی با میان‌گیری گشتاورهای دوم و چهارم تابع توزیع جهت‌گیری بر روی $N_f$ فیبر نمونه به حل معادلات پرداخته است.

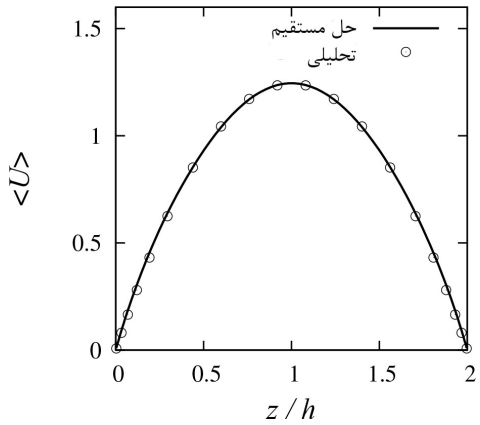
### ۴-۲- روش تقریب گشتاور

بر اساس تئوری برنر تانسور تنش غیر نیوتنی ناشی از فیبرها تابع گشتاور دوم و چهارم و تابع توزیع جهت‌گیری فیبرها می‌باشد؛ بنابراین می‌توان به‌جای حل مستقیم معادله فوکر-پلانک که نیاز به حجم محاسبات بسیار بالایی می‌باشد معادلات گشتاورها را حل کرد.

[1] Langevin
[2] Itô



[ Downloaded from yujs.yu.ac.ir on 2026-10-08 ]




**شکل ۲**- سرعت متوسط نسبت به فاصله بدون بعد از دیواره

با استفاده از تعریف گشتاورها و روابط (۱۲) و (۱۳) معادله تکاملی برای گشتاورها به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{D\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi}{Dt} &= \boldsymbol{\Omega}\cdot\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi + \langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\cdot\boldsymbol{\Omega}^T \\ &+\kappa\left[\mathbf{D}\cdot\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi + \langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\cdot\mathbf{D} - 2\mathbf{D}:\langle \mathbf{nnnn}\rangle_\psi\right] \\ &+2D_r\left[\mathbf{1}-3\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\right]\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

با توجه به‌ظاهر شدن گشتاور چهارم در معادله تکاملی و وابستگی آن به معادلات گشتاور ششم و بالاتر معادله (۲۷) بسته نبوده و قابل‌حل نیست؛ بنابراین یک مسئله بستگی کلاسیک است. برای حل این مسئله باید از مدل‌های بستگی استفاده کرد. در زیر چند مدل بستگی ارائه می‌شود.

۱- مدل بستگی خطی هند [۲۸] که در این مدل گشتاور چهارم به‌صورت رابطه خطی به گشتاورهای دوم بسط داده می‌شود و مدلی بسیار دقیق است.

$$\mathbf{D}:\langle \mathbf{nnnn}\rangle_\psi^{\text{lin}} = -\frac{2}{35}\mathbf{D} + \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\cdot\mathbf{D} + 2\mathbf{D}\cdot\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi \\ +\left(\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi:\mathbf{D}\right)\mathbf{1}\end{bmatrix} \qquad (۲۹)$$

۲- مدل بستگی درجه دو، این روش زمانی دقیق عمل می‌کند که فیبرها در یک راستا باشند. این روش از نظر سادگی مورد توجه است:

$$\langle \mathbf{nnnn}\rangle_\psi^{\text{quad}} = \langle \mathbf{nn}\rangle_\psi \circ \langle \mathbf{nn}\rangle_\psi \qquad (۳۰)$$

۳- مدل بستگی هیبرید ادوانی و تاکر [۲۹] که میان یابی بین روش‌های خطی و مدل بستگی درجه دو است. برای مقیاس‌های مختلف f قابل تعریف می‌باشد:

$$\langle \mathbf{nnnn}\rangle_\psi^{\text{hyb}} = \left[\left(1-f\right)\langle \mathbf{nnnn}\rangle_\psi^{\text{lin}} + f\langle \mathbf{nnnn}\rangle_\psi^{\text{quad}}\right] \qquad (۳۱)$$

در این معادله، متوسط وزنی بین مدل‌های بستگی خطی و درجه دو مقیاس f است. اگر f=0 باشد بیانگر مدل بستگی خطی است و در صورتی که f=1 مدل بستگی درجه دوم است.

۴- مدل بستگی بر پایه برازش بهینه (IBOF) چانگ [۳۰]:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{nnnn}\rangle_\psi^{\text{IBOF}} &= \beta_1 S\left\{\mathbf{11}\right\} + \beta_2 S\left\{\mathbf{1}\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\right\} \\ &+\beta_3 S\left\{\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\right\} \\ &+\beta_4 S\left\{\mathbf{1}\left(\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\cdot\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\right)\right\} \\ &+\beta_5 S\left\{\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\left(\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\cdot\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\right)\right\} \\ &+\beta_6 S\left\{\left(\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\cdot\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\right)\left(\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\cdot\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\right)\right\}\end{aligned} \qquad (۳۲)$$

مدل بستگی هینچ و لیل [۳۱ و ۳۲]:

$$\langle \mathbf{nnnn}\rangle_\psi^{\text{HL}}:\mathbf{D} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\cdot\mathbf{D}\cdot\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi - \langle \mathbf{nn}\rangle_\psi\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi:\mathbf{D} \\ -21\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi^2:\mathbf{D} + 21\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi:\mathbf{D}\end{bmatrix} \qquad (۳۳)$$

طرح نرمال‌سازی موسائی [۳۳] که در این روش گشتاور چهارم در معادله تکاملی گشتاورها صرف‌نظر می‌شود و پس از محاسبه رد اثر $I^* = \text{tr}\{\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi^*\}$ مشاهده می‌شود $\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi^*$ شرط یکه بودن بردار جهت‌گیری را ارضا نمی‌کند. با تقسیم کردن کلیه مؤلفه‌ها بر $I^*$ گشتاور دوم را در مرحله زمانی جدید طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود و شرط یکه بودن را برآورده می‌کند (علامت $\langle\rangle^*$ بیانگر معادله تکاملی بدون در نظر گرفتن گشتاور چهارم است).

$$\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi = \frac{\langle \mathbf{nn}\rangle_\psi^*}{I^*} \qquad (۳۴)$$

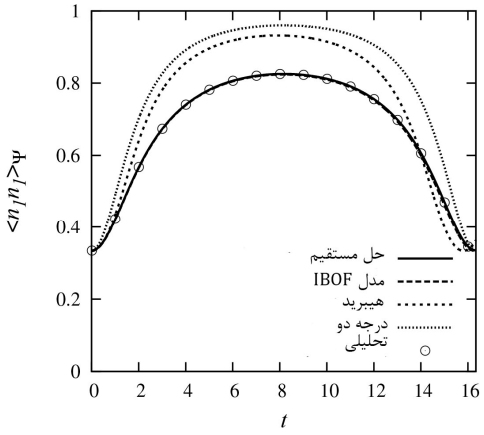
طرح نرمال‌سازی دارای نتایجی برابر با مدل بستگی درجه دو می‌باشد که اثبات آن در مرجع [۳۳] آمده است. موسائی [۲۰] گشتاور دوم به دست آمده از روش مستقیم را با دیگر مدل‌های ارائه شده، مقایسه کرده است.

مدل بستگی با استفاده از بازسازی تابع توزیع جهت‌گیری موسائی [۳۴] بر خلاف روش‌های متداول تابع توزیع جهت‌گیری $\psi$را با استفاده از بسط فوریه بازسازی کرد و با استفاده از آن گشتاور دوم و چهارم به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{n}) &= \mathbf{V}_0\mathbf{F}_0(\mathbf{n}) + \mathbf{V}_2:\mathbf{F}_2(\mathbf{n}) + \mathbf{V}_4::\mathbf{F}_4(\mathbf{n}) + \ldots \\ \psi_2(\mathbf{n}) &= \mathbf{V}_0\mathbf{F}_0(\mathbf{n}) + \mathbf{V}_2:\mathbf{F}_2(\mathbf{n}) \\ \psi_4(\mathbf{n}) &= \mathbf{V}_0\mathbf{F}_0(\mathbf{n}) + \mathbf{V}_2:\mathbf{F}_2(\mathbf{n}) + \mathbf{V}_4::\mathbf{F}_4(\mathbf{n})\end{aligned} \qquad (۳۵)$$



[ Downloaded from yujs.yu.ac.ir on 2026-10-08 ]




**شکل ۳**- مقایسه گشتاور دوم به دست در روش‌های مختلف

در رابطه بالا $\mathbf{F}_i$ توابع پایه فوریه و $\mathbf{V}_n$ ضرایب فوریه نام دارند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F_{ij}(\mathbf{n}) = n_i n_j - \frac{1}{3}\delta_{ij} \qquad (۳۶)$$

$$\mathbf{V}_n = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{N!}\prod_{K=0}^{N}(2K+1)\langle \mathbf{F}_N \rangle \qquad (۳۷)$$

روش دیگر برای حل معادله فوکر-پلانک مدل‌های بستگی جبری هستند. در ادامه مدل‌های بستگی موجود که توسط محققین مختلف ارائه شده است، تشریح و مشکلات هر کدام مورد بازبینی قرار گرفته می‌شود.

### ۴-۳- روش مدل‌های بستگی جبری

نخستین مدل بستگی توسط اورلاندی [۲۳] ارائه گردید. در این مدل تانسور تنش غیر نیوتنی بر اساس تجربه، طبق رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\tau}^{NN} = 2\mu_p \mathbf{D} \qquad (۳۸)$$

که در آن $\mu_p = \mu_p(\mathbf{x},t)$ میدان لزجت غیر ایزوترپ به دلیل حضور فیبرها است. در جریان‌های کششی (هنگامی که دو گردابه در خلاف جهت همدیگر حرکت کنند) تشدید می‌شود. طبق یافته‌های تجربی، اورلاندی میدان لزجت غیر ایزوترپ در رابطه (۳۷) را به‌صورت زیر پیشنهاد کرد:

$$\mu_p = C\left(\frac{\boldsymbol{\Omega}:\boldsymbol{\Omega}}{\mathbf{D}:\mathbf{D}}\right) \qquad (۳۹)$$

C در رابطه فوق ثابت مدل است که نشان‌دهنده غلظت پلیمر است. ارتباط دادن ثابت مدل با غلظت بسیار مشکل و در عمل غیرممکن است. $\mu_p$ در صورتی ظاهر می‌شود که $\mathbf{D}:\mathbf{D} \geq S_T$ و $\mathbf{D}:\mathbf{D} \geq \boldsymbol{\Omega}:\boldsymbol{\Omega}$ یعنی نرخ کرنش بزرگ‌تر از نرخ چرخش باشد و همچنین نرخ کرنش از مقدار از پیش تعیین‌شده $S_T$ بزرگ‌تر باشد. یکی از مشکلات این روش، این است که نسبت به تبدیلات گالیله ناوردا نیست؛ یعنی اگر ناظری بردار سرعت $\mathbf{U}$ را پیگیری کند تانسور تنش غیرنوتنی حاصل $\boldsymbol{\tau}^{NN}$ و ناظری دیگر با سرعت نسبی $\mathbf{U}^* = \mathbf{U} + \mathbf{V}$ ($\mathbf{V}$ بردار سرعت ثابت) باشد. تانسور تنش غیر نیوتنی $\boldsymbol{\tau}^{NN*}$ به دست می‌آید. برای ارضای ناوردایی باید رابطه $\boldsymbol{\tau}^{NN} = \boldsymbol{\tau}^{NN*}$ برقرار باشد.

مدل جبری دوم به نام مدل لزج غیر ایزوترپ (VA) توسط دن توندر و همکاران [۲۴ و ۳۵] برای شبیه‌سازی کاهش درگ آشفته برای جریان درون لوله استفاده شد. با استفاده از رابطه (۱۱) تانسور تنش غیر نیوتنی برای فیبرهای بسیار نازک ($r \to$) به رابطه زیر کاهش می‌یابد:

$$\boldsymbol{\tau}^{NN} = \alpha\mu \mathbf{D}:\langle \mathbf{nnnn} \rangle_\psi \qquad (۴۰)$$

که در آن $\mu$، ضریب لزجت دینامیکی سیال حامل و $\alpha$، تابعی از کسر حجمی $\phi$ و r ضریب منظر فیبرها است:

$$\alpha = \frac{\phi r^2}{\ln r} \qquad (۴۱)$$

در این مدل فرض شده است که فیبرها در هر لحظه و در هر نقطه با بردار سرعت محلی هم‌راستا هستند یعنی:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{U}}{\sqrt{\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}}} \qquad (۴۲)$$

که با جایگذاری رابطه (۴۱) در (۳۹) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\boldsymbol{\tau}^{NN} = \alpha\mu \mathbf{D}:\frac{\mathbf{U}\circ\mathbf{U}\circ\mathbf{U}\circ\mathbf{U}}{(\mathbf{U}\cdot\mathbf{U})(\mathbf{U}\cdot\mathbf{U})} \qquad (۴۳)$$

این روش نیز مانند مدل اورلاندی نسبت به تبدیلات گالیله ناوردا نیست. مشکل دیگر این روش، این است که در مقایسه با شبیه‌سازی مستقیم عددی از حل مونت-کارلو تانسور گشتاور دوم متوسط $\langle\langle \mathbf{nn} \rangle_\psi\rangle$ در مرکز کانال ایزوترپ نیست (تانسور کروی نیست) و مؤلفه‌های سرعت یکسان نیستند. مشکل دیگر آن لزجت برشی است که بسیار کمتر از حالت واقعی تخمین می‌زند.

مدل بستگی جبری (VAF) که اخیراً توسط موسائی [۳۶] ارائه شد که در واقع توسعه‌ای از مدل (VA) دن توندر می‌باشد و مشکلات آن را رفع کرده است در این مدل فرض شده است که فیبرها با بردار سرعت نوسانی جریان آشفته هم‌راستا هستند:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \qquad (۴۴)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} - \langle \mathbf{U} \rangle \qquad (۴۵)$$



[ Downloaded from yujs.yu.ac.ir on 2026-10-08 ]

که در آن $\langle \mathbf{U} \rangle$ بردار سرعت می‌باشد که تانسور تنش غیر نیوتنی به شکل زیر ظاهر می‌شود:

$$\boldsymbol{\tau}^{NN} = \alpha\mu\mathbf{D}:\frac{\mathbf{u}\circ\mathbf{u}\circ\mathbf{u}\circ\mathbf{u}}{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})} \qquad (۴۶)$$

صحت این فرض را می‌توان از اندازه بسیار کوچک فیبرها نتیجه گرفت که در آن فیبرها توسط بردار سرعت محلی جابه‌جا می‌شوند. در بررسی‌های انجام شده این روش برای رینولدزهای بالا نیز قابل استفاده است. تنها مشکل این مدل این است که پاسخ‌ها به‌صورت متوسط صحیح می‌باشند ولی به‌صورت لحظه‌ای نادرست هستند.

موسائی و همکاران [۳۷] مقایسه‌ای بین مدل‌های بستگی مهم موجود برای حل جریان‌های توربولانت انجام دادند و به این نتیجه رسیدند که همه مدل‌های ارائه شده دارای خطا و پاسخ‌های غیردقیق هستند.

مدل بستگی جبری (VAFC) در راستای تکامل مدل‌های جبری، عباسی [۳۸] با در نظر گرفتن شرایط فیزیکی بیشتری از جریان آشفته به رفع مشکل مدل VAF پرداخت. همان‌طور که بیان شد، مدل VAF کاهش درگ در نزدیک دیواره را به‌خوبی شبیه‌سازی می‌کند. در نزدیک دیواره مؤلفه‌های سرعت نوسانی با یکدیگر برابر نیستند $u \neq 0, v = w = 0$. به این دلیل که عمده درگ اصطکاکی حاصله از جریان آشفته در نزدیک دیواره است این مدل کاهش درگ را در سطح مطلوبی پیش‌بینی می‌کند؛ اما در مرکز کانال که جریان عبوری همگن است و تقریباً مؤلفه‌های نوسانی سرعت با همدیگر برابر هستند $u = v = w = 0$ نتایج حاصله از این مدل در مرکز کانال با حل دقیق استوکاستیک مونت- کارلو موسائی [۲۰] یکسان نیست. مدل جدید VAFC پیشنهادی این مشکل را رفع کرده و کاهش درگ را در سرتاسر کانال با دقت مطلوبی محاسبه می‌کند. در این مدل تانسور تنش غیر نیوتنی با استفاده از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\tau^{NN} = \alpha\mu\mathbf{D}:\frac{\mathbf{u}\circ\mathbf{u}\circ\mathbf{u}\circ\mathbf{u}}{(\mathbf{u}\circ\mathbf{u})(\mathbf{u}\circ\mathbf{u})}\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{t}) \qquad (۴۷)$$

در اینجا $\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{t})$ تانسور همبستگی سرعت است که در مرکز کانال دارای خواص زیر می‌باشد:

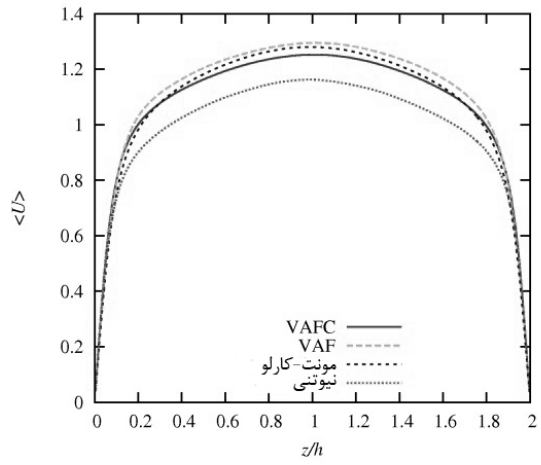
$$\begin{aligned}&\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{t}) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{t})\circ\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{t})\rangle \\ &\mathbf{R}(u,u)\approx 1, \mathbf{R}(v,v)\approx 1, \mathbf{R}(w,w)\approx 1 \\ &\mathbf{R}(u,v)\approx 0, \mathbf{R}(v,w)\approx 0, \mathbf{R}(u,w)\approx 0\end{aligned} \qquad (۴۸)$$

بنابراین شرایط موردنظر در مرکز کانال با در نظر گرفتن ویژگی تانسور همبستگی سرعت به دست می‌آید. گشتاور آماری مرتبه دوم تابع توزیع جهت‌گیری حاصله از این مدل مطابق حل دقیق استوکاستیک مونت-کارلو موسائی است:

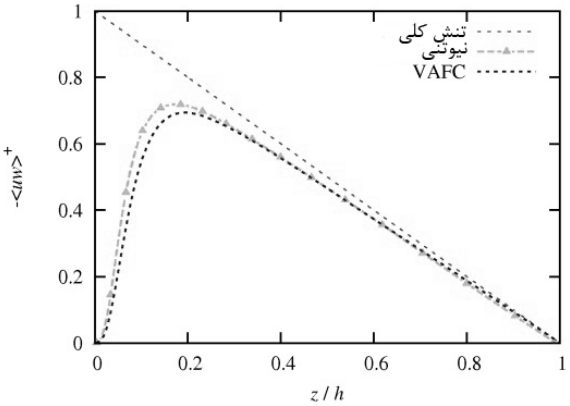
$$\langle uu \rangle = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (۴۹)$$

پروفایل سرعت متوسط به‌عنوان تابع فاصله بی‌بعد از دیوار مدل VAFC در مقایسه با مدل‌های موجود در شکل ۴ نشان داده شده است. افزایش سرعت قابل‌ملاحظه‌ای در جریان فیبری نسبت به جریان نیوتنی دیده می‌شود که نشانه کاهش درگ می‌باشد.

نمایه تنش برشی رینولدز بی‌بعد در شکل ۵ نشان داده شده است. دیده می‌شود که تنش برشی در جریان فیبری نسبت به جریان نیوتنی کاهش پیدا کرده است. مطابق‌ترم تولید در جریان آشفته، در تولید انرژی آشفتگی مؤثر است.




**شکل ۴**- مسیر پروفایل سرعت متوسط به دست آمده از روش‌های مختلف




**شکل ۵**- تنش برشی رینولدز نسبت به فاصله از دیواره



[ Downloaded from yujs.yu.ac.ir on 2026-10-08 ]

بنابراین کاهش این کمیت موجب تضعیف مکانیسم تولید آشفتگی می‌شود. به همین دلیل جریان در نزدیک دیواره آرام‌تر شده که به‌نوبه خود باعث افزایش ضخامت زیر لایه لزج می‌شود. این پدیده در مکانیسم کاهش درگ بسیار مهم است.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش روش‌های مختلف ارائه شده برای شبیه‌سازی کاهش درگ جریان آشفته با افزودنی‌های میکروفیبر و معایب و مزایا هر کدام بررسی شد. از معادلات ناویر-استوکس سه بعدی و وابسته به زمان برای جریان تراکم ناپذیر یک سیال غیر نیوتنی استفاده شده است. با در نظر گرفتن فرضیاتی تأثیر فیبرها بر روی جریان توسط تانسور تنش غیر نیوتنی محاسبه می‌شوند. تانسور تنش غیر نیوتنی توسط معادله مواد برنر بر اساس تابع توزیع جهت‌گیری بیان شده است؛ بنابراین نیاز به حل معادله فوکر-پلانک برای محاسبه تابع توزیع جهت‌گیری است. سه روش عمده برای حل معادله فوکر-پلانک تشریح شده است. معادلات روش‌های شبیه‌سازی مستقیم عددی به‌صورت خلاصه بررسی شده‌اند. در روش شبیه‌سازی مستقیم عددی حجم محاسبات بسیار حجیم است؛ که این نیاز به‌صرف زمان و هزینه بالایی دارد. مدل‌های بستگی جبری با توجه به حجم محاسبات کم و با داشتن نتایج مطلوب، موردتوجه پژوهشگران قرار گرفته است.

## منابع


[1] C. M. White, M. G. Mungal, Mechanics and prediction of turbulent drag reduction with polymer additives, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 40, pp. 235-256, 2008.

[2] J. L. Lumley, Drag reduction by additives, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 1, pp. 367-384, 1969.

[3] J. Xu, M. R. Maxey, G. E. Karniadakis, Numerical simulation of turbulent drag reduction using micro-bubbles, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 468, pp. 271-281, 2002.

[4] H. Choi, P. Moin, J. Kim, Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets, *Journal of Fluid Mechanics,* Vol. 255, pp. 503-539, 1993.

[5] I. Radin, J. Zakin, G. Patterson, Drag reduction in solid-fluid systems, *AIChE Journal*, Vol. 21, pp. 135-146, 1975.

[6] A. Moosaie, Study of vortical structure in microfiber-induced drag-reduced turbulent chanel flow using DNS, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 3, pp. 85-93, 2013, (In Persian)

[7] J. S. Paschkewitz. *Turbulent Drag Reduction Using Microfibers*. Ph.D. Dissertation, Stanford University, 2004.

[8] R. Palou, Transportation of heavy and extra-heavy crude oil by pipeline, *A review Journal of Petroleum Science and Engineering*, Vol. 75, No. 3, pp. 274-282, 2011.

[9] K. Sadeghi, N. Gholaamzade. drag Reduce coefficient objects UUV using polymer coatings. *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 75, No. 1, pp. 274-282, 2011.

[10] J. Kim, P. Moin, R.D. Moser, Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 177, pp. 133–166, 1987.

[11] P. R. Spalart, Direct simulation of a turbulent boundary layer up to Reθ = 1410, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 187, pp. 61–98, 1988.

[12] M. Manhart, *Umströmung einer Halbkugel in turbulenter Grenzschicht*, Ph.D. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, 1995.

[13] C. Brun, D. Juvé, M. Manhart, C. D. Munz, Numerical simulation of turbulent flows and noise generation, *Numerical Simulation of Turbulent Flows and Noise Generation*, Springer, Vol. 104, 2008.

[14] P. L. Frattini, G. G. Fuller, Rheo-optical studies of the effect of weak Brownianrotations in sheared suspensions, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 168, pp. 119–150, 1986.

[15] H. Brenner, Rheology of a dilute suspension of axisymmetric brownian particles, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 1, No. 2, pp. 195-341, 1974.

[16] G. Subramanian, D. L. Koch, Inertial effects on fibre motion in simple shear flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 353, pp. 383-414, 2005.

[17] A. Moosai, Effect of rotary inertia on the orientational behavior of dilute brownian and nonbrownian fiber suspensions, *Journal*




[ Downloaded from yujs.yu.ac.ir on 2026-10-08 ]

*Mathematics*, Vol. 62, No. 10, pp. 1554-1566, 2012.

[27] A. Moosaie, Development of stochastic field method for DNS of drag reduction by microfibers in turbulent channel flow, *Modares Mechanical Engineering*, accepted, Vol. 14, No. 4, pp. 75-82, 2014, (In Persian)

[28] G. L. Hand, A theory of anisotropic fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 46, pp. 13-33, 1962.

[29] S. G. Advani, C. L. Tucker, The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites, *Journal of Rheology*, Vol. 31, No. 8, pp.751-784, 1987.

[30] D. Chung, T. Kwon, Invariant-based optimal fitting closure approximation for the numerical prediction of flow-induced fiber orientation, *Journal of Rheology*, Vol. 46, pp. 169–194, 2002.

[31] E. J. Hinch, L. G. Leal, Constitutive equations in suspension mechanics, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 76, No. 1, pp. 187-208, 1976.

[32] E. J. Hinch, L. G. Leal, Constitutive equations in suspension mechanics, Approximate forms for a suspension of rigid particles affected by Brownian rotations, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 208, pp. 76-187, 1976.

[33] A. Moosaie, A. Le Duc, and M. Manhart, Numerical simulation of flow-induced fiber orientation using normalization of second moment, *ournal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* , Vol. 165, No. 9. pp. 551-554, 2010.

[34] A. Moosaie, A. Le Duc, M. Manhart, A priori analysis of a closure model using the reconstruction of the orientation distribution function in flow of fiber suspensions, *Computational Mechanics*, Vol. 48, No. 4, p. 451, 2011.

[35] G. G. Lipscomb, M. M. Denn, D. U. Hur, D. V. Boger, The flow of fiber suspensions in complex geometries, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 26, No. 3, pp. 297-325,1988.

[36] A. Moosaie, M. Manhart, An algebraic closure for the dns of fiber-induced *of Dispersion Science and Technology,* Vol. 34, No. 6, pp. 870-879, 2013.

[18] M. Manhart, Rheology of suspensions of rigid-rod like particles in turbulent channel flow, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics,* Vol. 112, No. 2, pp. 269-293, 2003.

[19] G. Jeffery, The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. In Proceedings of the royal society of London A: Mathematical, physical and engineering sciences, *The Royal Society*, Vol. 102, No. 715, pp. 161-179, 1922.

[20] A. Moosaie, M. Manhart, Direct Monte Carlo simulation of turbulent drag reduction by rigid fibers in a channel flow, *Numerical Fluid Mechanic springer*, Vol. 224, No. 10, pp. 2385-2413, 2013.

[21] J. J. J. Gillissen, B. J. Boersma, P. H. Mortensen, H. I. Andersson, On the performance of the moment approximation for the numerical computation of fiber stress in turbulent channel flow, *Physics of Fluids,* Vol, 19, No. 3, p. 035102, 2007.

[22] J. S. Paschkewitz, Y. Dubief, C. D. Dimitropoulos, E. S. G. Shaqfeh, P. Moin, Numerical simulation of turbulent drag reduction using rigid fibers, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 518, pp. 281-317, 2004.

[23] P. Orlandi, A tentative approach to the direct simulation of drag reduction by polymers, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 60, pp. 277-301, 1995.

[24] J. M. J. den Toonder, M. A. Hulsen, G. D. C. Kuiken, F. T. M. Nieuwstadt, Drag reduction by polymer additives in a turbulent pipe flow: numerical and laboratory experiments, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 337, pp. 193–231, 1997.

[25] J. J. J. Gillissen, B. J. Boersma, P. H. Mortensen and H. I. Andersson, The stress generated by non-brownian fibers in turbulent channel flow, *Physics of fluids*, Vol. 19, pp. 115-107, 2007.

[26] E. Zharovsky, A. Moosaie, A. Le Duc, M. Manhart and B. Simeon, on the numerical solution of a convection–diffusion equation for particle orientation dynamics on geodesic grids, *Applied Numerical*



[ Downloaded from yujs.yu.ac.ir on 2026-10-08 ]

turbulent drag reduction in a channel flow, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 166, pp. 1190-1197, 2011.

[37] A. Moosaie, A. Le Duc, M. Manhart, A comparative study on the performance of various moment closures in flows of fiber suspensions, *PAMM* Vol. 10, No. 1, pp. 447–448, 2010.

[38] J. Abbasi, *Direct numerical simulation of turbulent drag reduction by microfiber additives using an algebraic model based on the velocity correlation tensor*, Msh thesis, Yasouj University, 2013, (In Persian)

[ Downloaded from yujs.yu.ac.ir on 2026-10-08 ]